La numération décimale

1 Compléments

1.1 Un peu d'histoire

L'utilisation des chiffres 0,1,. . . 9 provient des Indiens (VIme siècle) via les Arabes (fin du VIIIme début du IXme). Ils ne se sont imposé en Occident qu'aux XIIIme et XIVme. L'origine remonte certainement aux doigts de la main.

1.2 Résumé du mode d'emploi

- Les chiffres utilisés sont, dans l'ordre, 0,1,. . . 9.
- Chaque chiffre a une valeur différente selon la position qu'il occupe dans l'écriture du nombre.
- Dix unités d'un ordre donné constituent une unité de l'ordre immédiatement supérieur.
- Tout nombre peut se décomposer en puissances de dix.
- Le chiffre 0 indique l'absence de groupement d'un ordre donné.

1.3 Les grands nombres

À partir des milliers, on travaille, en fait en base mille, la base dix devenant une base intermédiaire.[1] Nicolas Chuquet, en 1484, invente une nomenclature des grands nombres :

1000 se note 1 000 : mille 10^3
1 000 000 : million 10^6
1 000 000 000 000 : billion 10^{12}
1 000 000 000 000 000 000 : trillion 10^{18}

D'une manière générale, on appelle N-illion le nombre 10^{6N}, où N désigne le préfixe latin (tri, quadri, qui, six, septi, octi, noni, déci, undéci, duodéci..).
Parallélement, d'autres choix existent, utilisant le milliard ou reposant sur autre convention : ainsi les américains utilisent-ils encore une échelle selon laquelle le N-illion représente $10^{(3N+3)}$.
Depuis la Nomenclature officielle des Poids et Mesures datant de 1948, le système de Chuquet est le système officiel.

On a enfin inventé récemment : 10^{100} : le googol, 10^{googol} = le googolplex

[1] Si on était resté en base 10, on aurait inventé un mot pour 10 000.

1.3.1 Quelques exemples

L'âge de l'univers est d'environ 15 milliards d'années, donc $4{,}7.10^{17}$ s.
La distance terre soleil est d'environ 150 millions de km, et le diamètre de l'univers de 10^{23} km.
Le nombre total de particules dans l'univers est compris entre 10^{72} et 10^{87}.
A trente ans on a vécu environ un milliard de secondes et un peu plus de 10000 jours.

1.4 L'orthographe

Depuis l'arrêté du 28 décembre 1976 l'usage du trait d'union dans trente-quatre (p.ex.) est facultatif. La règle normale est de mettre le "trait d'union entre des éléments moindres que cent sauf s'ils sont joints par et". (ex. *quatre cent quatre-vingt-douze*).
Vingt et cent acceptent le pluriel s'ils ne sont pas suivis. (*Quatre cents*, mais *quatre cent un*). Cependant l'arrêté de 1976 tolère le pluriel dans tous les cas.
Mille est invariable. Million, milliard... sont variables.

17 700 380 : dix millions sept cent mille trois cent(s) quatre vingts.

2 L'apprentissage

2.1 Les programmes

PS, MS : les nombres jusqu'à 20.
GS : les nombres jusqu'à 10 sont acquis.
CP : les nombres jusqu'à 100 sont acquis, exploration un peu plus loin.
CE1 : les nombres jusqu'à 1000.
CE2 : les nombres jusqu'à 10000.
CM1 : les grands nombres.

Les items ci-dessous proviennent des I.O. de 1995.
Au cycle 2, par rapport à la numération décimale, on a :

- *Coder une quantité par la mise en œuvre de procédures de groupements par dizaines et centaines*
  - ▷ Réaliser des groupements par dizaines
  - ▷ Réaliser des groupements par dizaines et par centaines
  - ▷ Énoncer le résultat de groupements
  - ▷ Coder des regroupements suivant un code arbitraire
  - ▷ Coder des regroupements suivant un code conventionnel
  - ▷ Comprendre la signification des différents chiffres de l'écriture décimale
  - ▷ Maîtriser l'emploi du zéro dans la numération de position
  - ▷ Repérer des erreurs dans des groupements réalisés
  - ▷ Rectifier des erreurs dans les groupements organisés.

- *Coder une quantité par la mise en œuvre de procédures d'échanges par dizaines et centaines*
  - ▷ Procéder à des échanges en respectant une règle
  - ▷ Procéder à des échanges en modifiant une règle
  - ▷ Réaliser des échanges de dizaines
  - ▷ Réaliser des échanges de dizaines et de centaines
  - ▷ Procéder à des échanges à l'aide de pièces de monnaie
  - ▷ Comparer des collections après échanges
  - ▷ Coder des échanges
  - ▷ Coder le résultat d'un échange en respectant un code arbitraire
  - ▷ Coder le résultat d'un échange en respectant un code conventionnel
  - ▷ Repérer des échanges dans des groupements réalisés
  - ▷ Rectifier des échanges dans les groupements organisés.
  - ▷ Reconstituer une collection à partir d'un codage donné
  - ▷ Utiliser des compteurs
  - ▷ Maîtriser les règles de l'algorithme de la numération
- *Nommer les nombres*
  - ▷ Connaître le nom des nombres de 0 à 16
  - ▷ Connaître le nom des nombres multiples de 10, de 20 à 60
  - ▷ Connaître le nom des nombres multiples de 10 de 70 à 90
  - ▷ Connaître le nom des nombres de 17 à 19 et de 22 à 29
  - ▷ Connaître le nom des nombres de 100 à 1000
  - ▷ Maîtriser les règles conventionnelles de désignation des nombres
  - ▷ Nommer un nombre écrit sous forme chiffrée dans les entiers
  - ▷ Lire les nombres
  - ▷ Maîtriser la lecture globale des nombres
  - ▷ Lire un nombre écrit sous forme littérale
  - ▷ Lire un nombre écrit sous forme chiffrée
  - ▷ Maîtriser les règles conventionnelles de lecture d'un nombre (désignation des différentes classes)
  - ▷ Maîtriser la lecture de nombres comportant un zéro final
  - ▷ Maîtriser la lecture de nombres comportant un zéro intercalé
- *Connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier*
  - ▷ Distinguer les notions de "chiffre" et de "nombre"
  - ▷ Connaître le sens des termes "unité", "dizaine", "centaine"
  - ▷ Distinguer le chiffre des dizaines du nombre de dizaines
  - ▷ Connaître l'ordre des classes dans l'écriture des nombres
  - ▷ Associer au nom du nombre une décomposition additive

Les IO de 2002 ne remettent pas en cause ce référentiel, cependant, conformément à l'orientation générale du texte, elles insistent sur la place des problèmes :

Au cycle 2, les élèves acquièrent le sens des nombres et des opérations à travers la résolution de quelques grandes catégories de problèmes :

- *exprimer et garder en mémoire une quantité, une position dans une liste rangée, le résultat d'un mesurage.*
- *comparer des quantités ou des grandeurs, notamment lorsque les collections sont matériellement éloignées l'une de l'autre.*
- *prévoir quel sera le résultat d'actions sur des quantités, des positions ou des grandeurs (augmentation, diminution, réunion, partage, déplacement...).*

Le référentiel de compétences de fin de cycle est lui-même ordonné selon les différents types de problèmes proposés.

2.2 Groupements et échanges : le codage

L'activité de base de la construction de la numération décimale consiste à dénombrer une collection importante. On procède par regroupements de 10, le nombre d'éléments qui ne peuvent pas rentrer dans un groupement donne le chiffre des unités. On regroupe ensuite les paquets de 10 en gros paquets de 10 paquets. Le nombre de paquets inclassables donne le chiffre des dizaines. . .

Deux mécanismes sont donc constitutifs de cette traduction : le regroupement par paquets de dix et l'échange de dix paquets contre un paquet de la catégorie supérieure.
Les activités de groupement par 10 s'effectuent dès le CP, mais les élèves ne font pas forcément le lien avec la numération. (Si on demande combien il y a d'éléments dans la collection, ils comptent unité par unité). En fin de CP, les élèves doivent maîtriser cette activité pour les quantités inférieures à 100. Les centaines arrivent au CE1, les milliers au CE2.
L'utilisation du "raccourci" des dizaines ne deviendra nécessaire que si la collection est trop importante. (variable didactique : l'effectif de la collection).
Activité classique : les fourmillions. Le maître rapporte une collection monstrueuse (une grosse boîte d'allumettes, par exemple). Il s'agit de dénombrer les allumettes. Il induit les regroupements par paquets. . .

2.3 Le décodage

Il faut construire le décodage de l'écriture 2356 en "deux paquets de mille, 3 boîtes de cent, 5 sacs de dix et 6 unités. Le passage de 99 à 100, par exemple, reste un temps associé à la procédure dynamique d'échange. ("on ne se contente pas d'ajouter un, on range des objets dans la boîte).

La suite écrite est régulière, on peut organiser la frise numérique en lignes superposées de 10 nombres, on constate que les chiffres des unités sont constants dans une colonne.

2.4 Des problèmes permettant cette prise de sens :

- organiser une grande collection en vue d'écrire le nombre de ces éléments
- compter de 10 en 10, de n en n..
- reconnaître l'organisation en base dix dans une écriture chiffrée (exemple , combien de paquets faut-il pour que 435 enfants aient chacun un chocolat ? , Les chocolats sont vendus par paquets de dix).
- analyser une collection déjà organisée (utilisation de matériels de numération),
- comparaison des nombres à partir de leur écriture chiffrée (règles : le plus long. . .).
- utiliser les nombres dans les calculs

2.5 Des outils supports

- La monnaie, le Monopoly. . . (en enlevant les pièces et billets qui ne sont nécessaires à la base 10).
- Les barrettes et autre plaques multibase.
- Les compteurs.
- Les plaques à cache.

3 Les singularités de l'oral

Les enfants sont d'abord familiarisés avec les nombres à travers l'oral. Cependant le décodage est plus difficile :

- Problème des exceptions du début : onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.[2]
- L'intrusion de la base vingt, d'origine celte [3] : quatre vingt, et soixante (exception dans l'exception, on ne dit pas trois vingt, mais on fait tout comme entre 70 et 79). Les nombres sont construits suivant une logique additive et multiplicative : "quatre vingt onze" = $4\times20+11$. Ces irrégularités sont plus perturbantes que les précédentes car les nombres 11,..16 sont familiers. C'est l'idée de dire "dix et un, dix deux" qui serait étonnant pour les enfants. [4]
- La difficulté liée à l'ordre : vingt quatre $\neq$ quatre vingt.

---

[2] Onze, douze, treize. . . viennent du latin undecim, duodecim, tredecim. . . qui lui n'était pas irrégulier.

[3] La langue bretonne compte les vingtaines et non les dizaines : 63 "trois vingt et trois".

[4] Il y a également des perturbations plus loin, liées à une apparition de la base 100 : ainsi tolère-t-on les expressions onze cents, douze cents. . . notamment pour les dates.